الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2009

الشعبة: العلوم التجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$

1) أحسب v_0 و v_1.

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n: $S_n=v_0+v_1+.....+v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ) بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و Z عدد مركب

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

2) نضع: $Z_1=1+i$ ؛ $Z_2=1-\sqrt{3}i$

أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

ب) أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) n عدد طبيعي.عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$

1) (P) مستو معادلة له من الشكل $x-z+1=0$.

أ) بيّن أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب) ما طبيعة المثلث ABC.

2) أ) تحقّق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC).

ب) ما طبيعة $ABCD$.

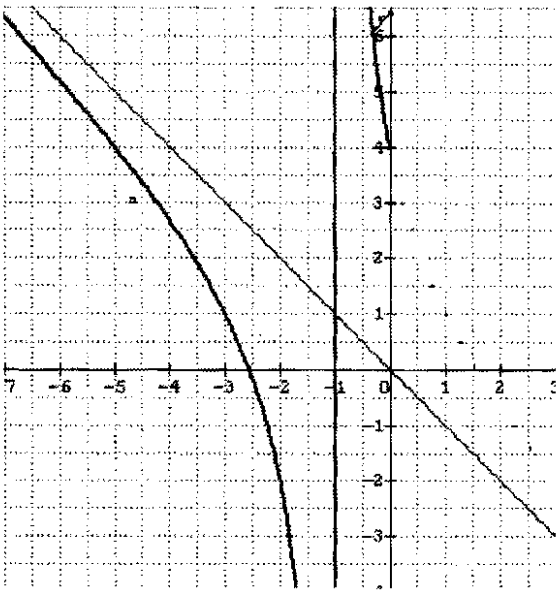
3) أ) أحسب المسافة بين D و المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$

(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.



1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أدرس تغيرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها:

$x=-\dfrac{1}{2}$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $y=0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط:

$A(2;3;-1)$ ؛ $B(1;-2;4)$ ؛ $C(3;0;-2)$ ؛ $D(1;-1;-2)$.

و ليكن (π) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$.

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1. النقط A، B ، C في استقامية.
2. (ABD) مستوي معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$.
3. المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π).
4. المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1;1;-1)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة **C** المعادلة: $z^2-2z+4=0$
2. نسمي z_1 ؛ z_2 حلي هذه المعادلة.

أ) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ب) A، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A=1-i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B=1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

أحسب الأطوال AB ، AC، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د) أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$

1. أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1.

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ) أحسب S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n=728$

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n \quad \text{و} \quad v_1=2$$

أ) أحسب v_2 و v_3.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$.

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

جـ) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to -1^{>}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to +\infty}\frac{\ln u}{u}=0$.

جـ) استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

د) أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-(x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة y=2 عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و3,4 .

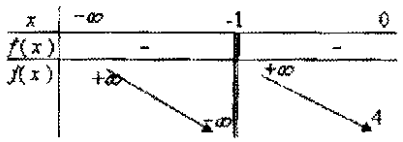
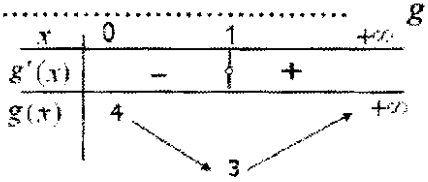
4. أرسم (C_f).

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y=x-1$ ؛ $x=0$ و $x=1$.

محاور الموضوع	عناصر الاجابة الموضوع الأول	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
المتتاليات	التمرين الأول: 1) $v_0=1$ ، $v_1=\frac{7}{3}$	2×0.25	03.5
	2) $v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ إذن (v_n) م.هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	1	
	3) أ) $S_n=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$	0.75	
	ب) $S_n=u_n-u_0$ و منه $u_n=S_n+1$	0.75	
	جـ) لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{5}{2}$ و منه (u_n) متقاربة	0.5	
الأعداد المركبة	التمرين الثاني: 1) $\Delta=(2i\sqrt{3})^2$ و منه $z_0=1+i$ ، $z'=1+\sqrt{3}i$ ، $z''=1-\sqrt{3}i$	4×0.25	05
	2) أ) $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$	2×0.5	
	ب) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ، $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$	2×0.5	
	جـ) $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	2×0.5	
	3) أ) $(k\in\mathbb{N})$ $n=12k$ معناه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n\in\mathbb{R}$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{\left(\frac{7n\pi}{12}i\right)}$	0.75	
	ب) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\frac{1}{2^{228}}$	0.25	
هندسة فضائية	التمرين الثالث: 1) أ) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و إحداثيات كل من A ، B ، C تحقق معادلة (P).	1	04
	ب) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ و ABC قائم في A.....	0.5	
	2) أ) $D\notin(ABC)$	0.5	
	ب) بما أن D لا تنتمي إلى (ABC) فإن $(ABCD)$ رباعي وجوه.....	0.5	
	3) أ) المسافة هي: $\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
	ب) الحجم: (وحدة مكعبة) $V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}AB.AC\right).h=\frac{1}{2}$	0.5	

8

محاور الموضوع	عناصر الإجابة الموضوع الأول	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	التمرين الرابع:		
	I) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty$	3×0.25	
	ب) ..... 	0.5	
	2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$	0.25	07.5
	ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=0$ ومنه $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (c_f) بجوار $+\infty$	2×0.25	
	جـ) $g'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$	0.75	
دوال	إشارة $g'(x)$ ، $g(0)=4$	0.25+0.25	
		0.5	
	II) 1) أ) $\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}} \dfrac{k(h)-k(0)}{h}=-3$ و $\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}} \dfrac{k(h)-k(0)}{h}=-5$	2×0.25	
	الدالة k لا تقبل الاشتقاق عند 0	0.25	
	ب) النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية والمنحنى (C_K) يقبل نصفي مماسين..	0.5	
	2) اكتب معادلتي المماسين $({}_1\Delta)$ و $({}_2\Delta)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$	0.5	
	3) الرسم $({}_1\Delta)$ ، $({}_2\Delta)$ و (C_K)	1	
	4) $A=\int_{-1/2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1/2} g(x)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}+4Ln(x+1)\right]_{-1/2}^{0}+\left[\dfrac{x^2}{2}+4Ln(x+1)\right]_{0}^{1/2}$		
	$=\dfrac{1}{4}+4Ln3\ (\mu a)$	1	

9

محاور الموضوع	عناصر الاجابة الموضوع الثاني	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
هندسة فضائية	**التمرين الأول: (04 نقط)**		04
	1) **جواب خاطئ** لأن A ، B ، C ليست على استقامية.....	01	
	2) جواب صحيح لأن إحداثيات A ، B ، D تحقق المعادلة.....	01	
	3) جواب خاطئ لأن $\overrightarrow{CD}$ ليس شعاع ناظمي لـ (π).....	01	
	4) جواب خاطئ لأن $\overrightarrow{BH}$ ليس شعاع ناظمي لـ (π).....	01	
الأعداد المركبة	**التمرين الثاني: (04 نقط)**		04
	1) **حلول المعادلة:** $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ ؛ $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$	0,75	
	2.أ) $z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ ؛ $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$	0,5	
	ب) $AB = 2\sqrt{3}$ ؛ $BC = \sqrt{3}$ ؛ $AC = 3$ ؛ ABC **مثلث قائم**	01	
	جـ) $\lvert Z \rvert = \frac{1}{2}$ ؛ $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$	0,75	
	د) $Z^3 = -\frac{1}{8}$ ؛ $Z^6 = \frac{1}{64}$ ؛ $Z^{3k} = \left(-\frac{1}{8}\right)^k$ و هو عدد حقيقي.....	01	

المتتاليات	**التمرين الثالث (05 نقط)**		05
	1.أ) $u_2 = 6$ ؛ $q = 3$ ؛ $u_1 = 2$	1,75	
	ب) $u_n = 2 \times 3^{n-1}$	0,25	
	جـ) $S_n = 3^n - 1$ ؛ $n = 6$	2x0,5	
	2.أ) $v_2 = 5$ ؛ $v_3 = \frac{27}{2}$	0,5	
	ب) (w_n) **متتالية هندسية أساسها** $q = \frac{1}{2}$ **و حدها الأول** $w_1 = \frac{1}{3}$	0,5	
	جـ) $w_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ؛ $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$	2x0,5	

10

الدوال	التمرين الرابع (07 نقط)		07
	الجزء الأول: 1) $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x\to-1} h(x)=-\infty$	0,5	
	2) $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ؛ h متزايدة على $[0;+\infty[$ ؛ جدول التغيرات	3x0,25	
	3) $h(0)=0$ ؛ إشارة $h(x)$	2x0,25	
	الجزء الثاني: 1.أ) $\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$ ؛ $x=-1$ معادلة لمستقيم مقارب.....	00,5	
	ب) $\lim_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)}=0$	0,5	
	ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0,25	
	د) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ ؛ $y=x-1$ معادلة لمستقيم مقارب.....	0,5	
	هـ)الوضعية.....	0,25	
	2) $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ؛ جدول التغيرات.....	0,5+0,5	
	3) f مستمرة و متزايدة على $[3,3\,;3,4]$ و $f(3,3)<2<f(3,4)$ ...	0,75	
	4) رسم (C_f).....	0,75	
	المساحة: $A=\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2\,u.a.$	0,75	

11